Aufgabe 14 (TR) ++ Drehrad mit gekoppelten Massen

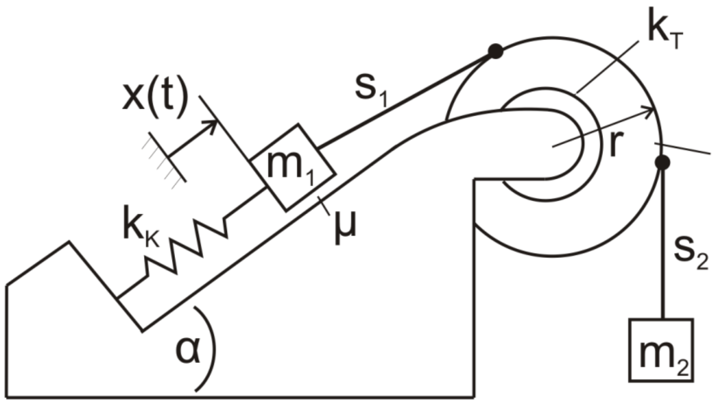

Abbildung 12: Drehrad mit gekoppelten Massen

Das in Abbildung 12 gezeigte System besteht aus zwei Massen m_1 und m_2, die über zwei Seile S_1 und S_2 verbunden sind. Die Seile sind an einer Rolle mit der Trägheit J und dem Radius r befestigt. Es wird angenommen, dass sich die Seile nicht unter einer Kraftwirkung ausdehnen. Ferner ist die Masse m_1 über eine Feder mit der Federsteifigkeit d_k verankert und die Rolle ist mit einer Torsionsfeder mit der Drehsteifigkeit k_T versehen. Beide Federn sind für die Ausgangsposition $x=0$ entspannt. Bei einer Bewegung auf der schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel α wirkt eine Reibungskraft mit dem Reibungskoeffizienten μ. Gesucht ist die Geschwindigkeit $v(t)$ für $v>0$.

a) Welche Koordinate(n) beschreiben die Bewegung aller Körper des Systems? Wieviele Freiheitsgrade hat das zusammengesetzte System?

b) Stellen Sie die Lagrangefunktion $L=T^*-U$ auf.

c) Berechnen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung und leiten Sie damit die Differentialgleichung des Systems ab.

Aufgabe 15 (UE) ✚✚✚✚ Invertiertes Pendel

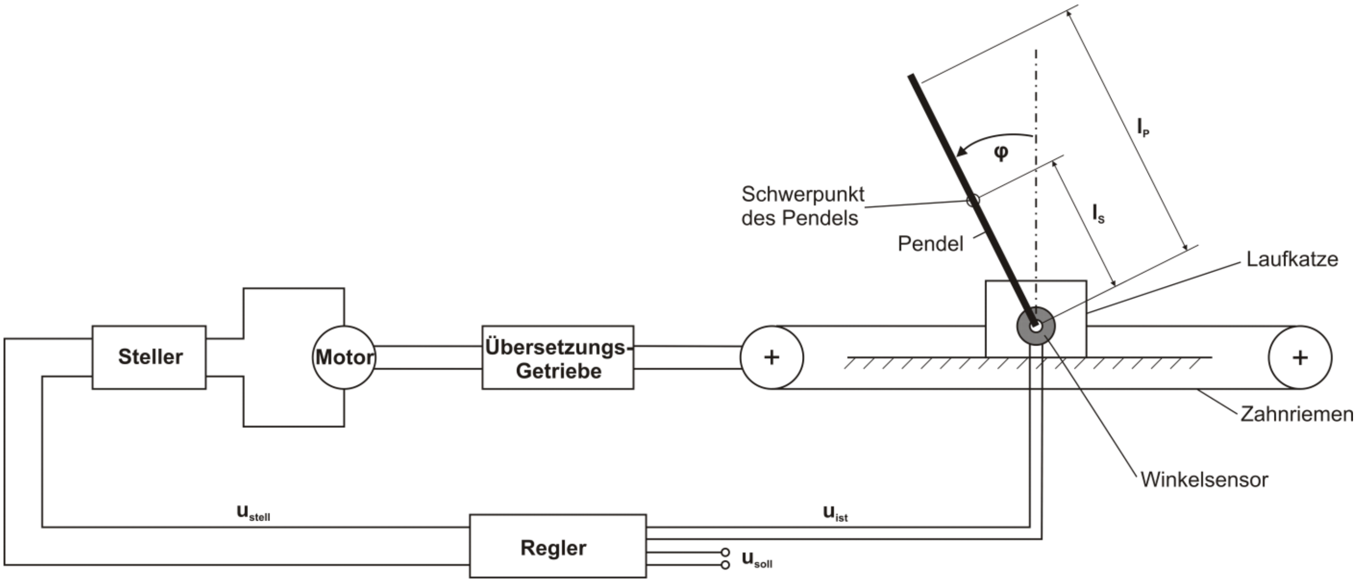

Abbildung 13: Pendelversuchsaufbau

Das dynamische Verhalten eines Pendelversuchsaufbaus des IRS-Praktikums wird im Folgenden untersucht. Das Pendel in Abbildung 13 ist an einer Laufkatze drehbar befestigt, die über ein Laufband in horizontaler Richtung mit Hilfe eines Antriebsmotors bewegt wird. Der Antrieb ist über ein Übersetzungsgetriebe mit dem Laufband gekoppelt. Das Pendel soll eine senkrechte Position mit dem Winkel $\varphi = 0$ einnehmen. Eine Abweichung wird mittels eines Winkelsensors gemessen und einem Regler zugeführt, der das Stellsignal des Antriebes ändert, um die Abweichung zu verringern. Im Folgenden wird nur das Verhalten des Pendel betrachtet, welches ganze Drehungen ausführen kann.

Das Pendel besteht aus einer Punktmasse m_P, die über eine als masselos angenommene Stange der Länge l_P mit einer Welle verbunden ist. Der Schwerpunkt der Masse befindet sich im Abstand von der Länge l_S.

In Abbildung 14 bewirkt als Eingangsgröße der Antriebsmotor eine Kraft F_K, die eine Beschleunigung $\ddot{s}_K$ bzw. eine Auslenkung s_K verursacht. Mit der Bewegung der Laufkatze kann die Position des Pendels beeinflusst werden, wobei die Lagerreibung M_R berücksichtigt werden muss.

a) Welche Energien müssen für die Lagrangefunktion $L = T^* - U$ für das System berücksichtigt werden? Stellen Sie die Lagrangefunktion auf.

b) Ersetzen Sie für die Geschwindigkeit $v^2(t) = \dot{x}_P^2(t) + \dot{y}_P^2(t)$ des Pendels die Abhängigkeit von den X-Y-Koordinaten durch den Winkel $\varphi(t)$.

c) Leiten Sie die Lagrangefunktion nach φ und $\dot{\varphi}$ bzw. s_K und $\dot{s}_K$ ab, um die Differentialgleichungen für die Laufkatze und das Pendel zu erhalten.

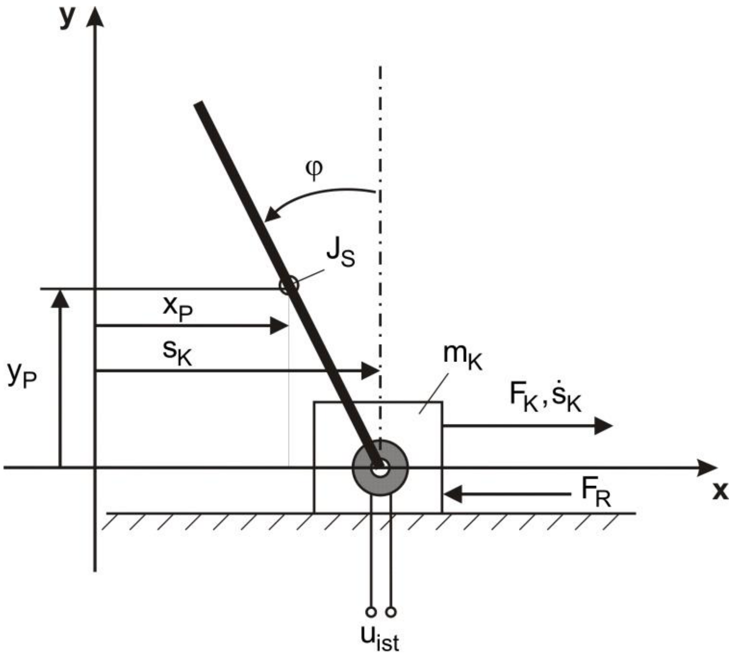

Abbildung 14: Pendel mit Laufkatze

Aufgabe 16 (UE) +++ Fliehkraftregler

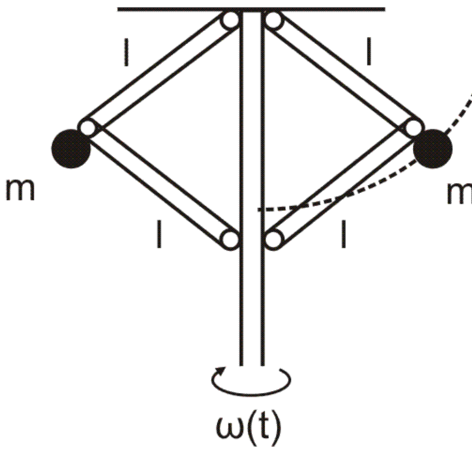

Abbildung 15:
Fliehkraftregler

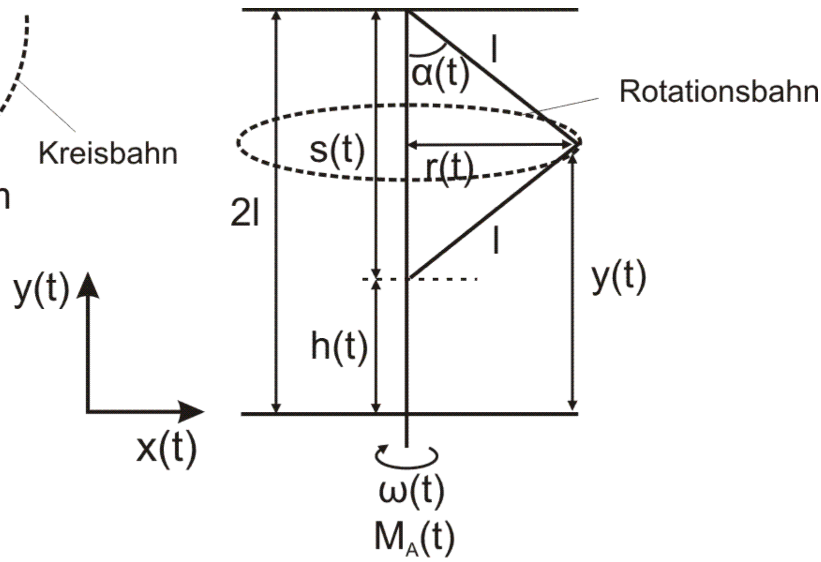

Abbildung 16:
Prinzipskizze

In Abbildung 15 ist ein Fliehkraftregler dargestellt, der im 18. Jahrhundert zur Messung und Regelung der Drehzahl von Dampfturbinen eingesetzt wurde. Eine mit der Dampfmaschine gekoppelte Welle treibt den Fliehkraftregler mit dem Antriebsmoment $M_A(t)$ an und rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ als Eingangsgröße. Zwei Massen sind am Ende von Stäben mit der Länge l befestigt und rotieren um die senkrechte Drehachse. Die oberen Stäbe sind drehbar angebracht und die unteren Stäbe können an der Rotationsachse eine Auf- und Abbewegung durchführen. Aufgrund der Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ wirkt eine Zentrifugalkraft auf die beiden Massen m, so dass beide eine Bewegung auf einer Kreisbahn (siehe Abbildung 15) mit dem Radius l erfahren. Gleichzeitig wirkt die Schwerkraft entgegen, so dass bei einer konstanten Winkelgeschwindigkeit die Massen eine Höhenlage y einnehmen. Die Reibung mit $M_r = k_r \cdot \omega(t)$ fasst alle wirkenden Reibungseffekte im System zusammen.

a) Welche Energien U und T^* müssen für dieses System berücksichtigt werden?
Mit welchen zwei Variablen in Abbildung 16 lassen sich alle relevanten Energien in deren Abhängigkeit ausdrücken? Definieren Sie die Variablen als generalisierte Koordinaten für die weiteren Aufgabenteile.

b) Schreiben Sie die Höhenlage $y(t)$ der Masse m als Funktion in Abhängigkeit des Winkels $\alpha(t)$ und der Stablänge l auf. Geben Sie für die Auslenkung die Energie U in Abhängigkeit von $\alpha(t)$ an.

c) Die beiden Massen besitzen eine Energie aufgrund ihrer Bewegung um die Rotationsachse in Abhängigkeit von $v_{Rot}(t)$. Außerdem bewegen sich die Massen mit einer Bahngeschwindigkeit $v_{Kreis}(t)$ bei einer Änderung des Winkels $\alpha(t)$. Ersetzten Sie die beiden Geschwindigkeit durch die generalisierten Koordinaten aus Aufgabenteil a), überlegen Sie sich anhand von Abbildung 16 die Beziehungen und Zwangsbedingungen.

d) Leiten Sie die Lagrangefunktion $L = T^* - U$ für die unter a) definierten generalisierten Koordinaten ab, um die Differentialgleichungen des Systems zu erhalten. Welche Quellelemente und dissipative Elemente müssen für die Euler-Lagrange-Gleichung berücksichtigt werden?

Aufgabe 17 (TR) ✧✧✧✧ Gleichstrommaschine mit Fliehkraftregler

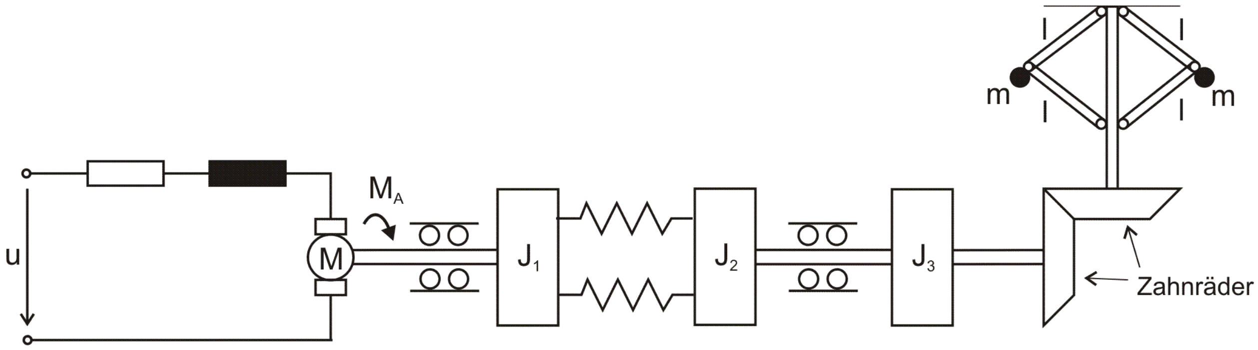

Abbildung 17: Fliehkraftregler mit Gleichstrommaschine

Der in Aufgabe 16 vorgestellte Fliehkraftregler soll in einem Technikmuseum ausgestellt werden. Jedoch wird der Regler in Abbildung 17 über ein Zahnradgetriebe an eine Welle mit Last gekoppelt, die von einer Gleichstrommaschine anstatt von einer Dampfmaschine angetrieben wird. Das Getriebeübersetzungsverhältnis mittels Zahnräder betrage p. Durch eine mechanische Kopplung des Fliehkraftreglers (siehe Abbildung 18), wird in Abhängigkeit der Auslenkung der Gewichtsmassen ein Potentiometer verstellt, der die Klemmspannung $u(t)$ beeinflusst (in den Abbildungen nicht weiter dargestellt).

Die Welle mit dem Antriebsmoment M_A treibt über eine elastische Kupplung (Federkonstanten k, Trägheit J_1 und J_2) die Last mit der Trägheit J_3 an. Die beiden zusammengefassten Federn widerfahren eine Auslenkung für einen Verdrehungswinkel $\Delta\varphi_{12} \neq 0$. Die Welle ist zweifach gelagert mit den Dämpfungskonstanten d_1 und d_2.

a) Stellen Sie alle Grundgleichungen der relevanten Größen des Systems auf. Stellen Sie mit Hilfe der Grundgleichungen und der Abbildung 17 das verallgemeinerte Ersatzschaltbild für den elektrischen Teil und die Welle auf, um einen Überblick für die Zusammenhänge zu erlangen ohne die Differentialgleichung des Gesamtsystems herzuleiten. Überlegen Sie sich wie der Fliehkraftregler im ESB mit der Welle gekoppelt ist, die Elemente des Fliehkraftreglers müssen dabei im ESB nicht explizit angegeben werden.

b) Stellen Sie die Lagrangeteilfunktion L_{elek} für die elektrische Seite auf. Verwenden Sie die generalisierten Koordinaten q für die Ladung und den Strom i.

c) Stellen Sie nun die Lagrangeteilfunktion L_{mech} auf. Verwenden Sie als Koordinaten $\varphi_1, \varphi_2, \alpha$ und deren Ableitungen. Wie kann die Winkelgeschwindigkeit $\omega_3(t)$ sinnvoll ersetzt werden?

d) Leiten Sie für das Gesamtsystem die Euler-Lagrangegleichung von $L = L_{elek} + L_{mech}$ ab.

Abbildung 18: Fliehkraftregler
Quelle: Wikipedia